

CB-253

## SOFTWARE Y REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE CAMPO VECTORIAL

Fabiana Pauletich<sup>1,2</sup> – Laura del Río<sup>1</sup>[fpauletich@gmail.com](mailto:fpauletich@gmail.com) laura.delrio@ing.unlp.edu.ar<sup>1</sup>UIDET IMApEC – Dto. De Ciencias Básicas - Facultad de Ingeniería y <sup>2</sup> Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales- Universidad Nacional de La Plata-Argentina.

Núcleo temático: VII. Investigación en Educación Matemática.

Modalidad: Comunicación Breve (CB)

Nivel educativo: Educación para adultos

Palabras clave: Campos vectoriales, Registros de representación semiótica, Software

### Resumen

*Los campos vectoriales constituyen una noción fundamental en el estudio de diversos temas matemáticos y extra matemáticos en las carreras de Ingeniería. Para que los alumnos puedan comprender este concepto, se considera imprescindible que logren realizar conversiones entre diversos registros de representación de los campos vectoriales, evitando el encapsulamiento en un único registro.*

*Cabe preguntarse entonces en qué medida las actividades que se proponen habitualmente a los alumnos en un curso de Cálculo Vectorial en una Facultad de Ingeniería, promueven las conversiones de registros, qué estrategias ponen en juego estos estudiantes para lograr estas conversiones, y cuál puede ser el rol de un software graficador.*

*El trabajo de investigación que se propone consta de varias etapas y se adoptará como marco teórico la Teoría de los registros de representación semiótica de Duval. En el presente trabajo, se expondrá la primera etapa de la investigación, en la que interesa identificar las dificultades que puedan tener los alumnos en el trabajo con diversas representaciones de campos, caracterizar los procedimientos utilizados por los estudiantes en la resolución de actividades y, en este contexto determinar las ventajas y dificultades de la visualización de las gráficas de campos vectoriales en un software graficador.*

### Introducción

El concepto de campo vectorial forma parte de los contenidos de la formación básica de los estudiantes de las carreras de Ingeniería. Dado que este conocimiento es de fundamental importancia en materias más avanzadas de la carrera (Costa, 2013), es importante identificar cuales son los obstáculos que alumnos puedan tener para su comprensión.

En este trabajo se presenta la primera etapa de una investigación de carácter exploratorio, que se desarrolló en un curso de primer año en una facultad de Ingeniería.

En las siguientes secciones, se desarrollará brevemente el marco teórico utilizado en la presente investigación, el tratamiento del tema Campos Vectoriales en el contexto donde se realiza el presente estudio, los antecedentes encontrados en la literatura, la metodología, los resultados y, por último, las conclusiones y trabajos a futuro.

### **Marco teórico**

La importancia de las representaciones semióticas en la actividad matemática se manifiesta en tres aspectos (Duval, 2006). En primer lugar, a diferencia de otras disciplinas, los objetos matemáticos no son accesibles por la percepción u otros instrumentos, sino sólo a través de sus representaciones semióticas. En segundo lugar, la actividad matemática no puede desarrollarse sin representaciones semióticas debido a que la misma requiere la sustitución de unos signos por otros. En tercer lugar, dependiendo de la actividad matemática que se aborde, algunas representaciones semióticas resultan más apropiadas que otras y, más aún, algunos procedimientos sólo pueden realizarse utilizando sólo un tipo de representación.

Un registro de representación semiótica permite tres actividades cognitivas fundamentales de representación: *la formación, el tratamiento y la conversión* (Duval, 1998):

En esta última actividad cognitiva, la conversión, se basa la articulación de diferentes registros de representación. La relevancia de esta articulación radica en varios aspectos (Duval, 1998). En primer lugar, la posibilidad de articular registros permite elegir el más adecuado para hacer los tratamientos necesarios ante una tarea matemática. En segundo lugar, la elección de un registro para representar un objeto impone la selección de los elementos significativos del objeto que serán representados porque diferentes registros ofrecen distintas posibilidades y restricciones respecto a los elementos del objeto que pueden representarse. En tercer lugar, la coordinación de varios registros de representación es una condición necesaria para que no se confunda a los objetos matemáticos con sus representaciones y, a la vez, se les pueda reconocer en cada una de ellas. Bajo estas dos condiciones, una representación funciona verdaderamente como representación, es decir, proporciona el acceso al objeto representado.

Existen numerosas evidencias que muestran que la conversión es difícil de adquirir (Duval, 1999). La imposibilidad de llevar a cabo conversiones ocasiona el encapsulamiento de los registros, el cual conduce a la consideración de dos representaciones del mismo objeto como dos objetos matemáticos distintos. Ello impide usar el conocimiento en otros contextos, dificulta los

aprendizajes posteriores e imposibilita el control de sentido de las actividades abordadas (Duval, 1999).

### **Marco Institucional**

La experiencia se desarrolló con alumnos de una asignatura de primer año de Ingeniería, en la que se abordan los temas de Calculo Integral y Vectorial en una y varias variables. Tiene una modalidad teórico-práctica, es decir que no hay espacios separados para la teoría y la práctica. El aula cuenta con computadoras, libros y mesas cuya disposición favorece el trabajo grupal.

Los alumnos estudian el concepto de vector y sus operaciones básicas en una asignatura anterior y el concepto de campo vectorial se presenta en la materia a la que se hace referencia en este trabajo, como una función que a cada punto del plano o del espacio le hace corresponder un vector. Se define el dominio de un campo vectorial, y se trabaja tanto la expresión analítica los campos como la representación gráfica. Sin embargo, el único tipo de actividades que se proponen que implican un cambio entre estos tipos de representación, consiste en graficar el campo dada su expresión analítica. La estrategia sugerida en el material de la cátedra, y la adoptada por los alumnos, consiste en seleccionar algunos puntos del dominio del campo y calcular los vectores asociados a los mismos para luego graficarlos. Cabe preguntarse si esta estrategia, que puede denominarse *punteo*, resulta suficiente para comprender cabalmente el concepto de campo vectorial y su representación gráfica. De este cuestionamiento surge el presente trabajo de investigación, que se encuentra en su fase inicial, de carácter exploratoria.

### **Antecedentes**

Se han encontrado algunas investigaciones que dan cuenta de mejoras que pueden producirse en el aprendizaje de los campos vectoriales y de otros temas relacionados, como por ejemplo, el electromagnetismo en física, al integrar simulaciones interactivas y *applets* que favorezcan la visualización de los conceptos matemáticos.

Por ejemplo, el trabajo de Alvarez (2010) reporta mejoras en la comprensión de fenómenos electromagnéticos por parte de los alumnos a partir de la visualización de conceptos matemáticos, pero aclara que estos resultados “deben ser complementados con otras investigaciones de carácter cualitativo que indaguen sobre los procesos que se han producido en los estudiantes durante el aprendizaje del tema” (p. 148).

Costa y Di Domenicantonio (2010) también realizan un trabajo en el cual muestran mejoras en los resultados del aprendizaje al implementar un taller en el aula de matemática integrando

representaciones computacionales de campos vectoriales e interactuando con docentes de física, quienes aportan las interpretaciones físicas de los conceptos matemáticos estudiados.

Estos, entre otros trabajos analizados, coinciden en que la enseñanza de estos temas es compleja, que la visualización gráfica mediada por computadora puede contribuir de manera favorable (a partir de *tests* que miden la comprensión alcanzada y/o mediante encuestas a los alumnos que miden la percepción que estos tienen de su propia comprensión), pero se observa la necesidad de profundizar en los procedimientos puestos en juego por los alumnos a la hora de resolver actividades que involucran campos vectoriales y la interpretación que estos hacen de lo que visualizan en pantalla cuando interactúan con un *software*.

### **Metodología**

Dado que no se han encontrado trabajos que permitan pre-definir categorías para el análisis de las dificultades de los alumnos al interactuar con un *software* graficador que permita el trabajo con el registro de representación gráfico de campos vectoriales y de los procedimientos que ponen en juego al utilizar una herramienta como esta para abordar actividades, se decidió llevar a cabo una primera fase exploratoria, que permita en un futuro contar con tales categorías para avanzar en una fase descriptiva.

Se convocó a los alumnos, luego de haber abordado el tema campos vectoriales, a participar en forma voluntaria de una experiencia que se llevaría a cabo fuera del horario de clase.

De los 60 alumnos inscriptos en la comisión concurrieron a la cita 11 alumnos a quienes se les otorgó computadoras para trabajar (una cada dos alumnos) y una guía de actividades que se presenta en el Anexo. Con la computadora, los alumnos tenían acceso a un *applet* generado *ad hoc* con GeoGebra<sup>16</sup>, el cual permite en forma muy simple obtener representaciones gráficas de campos vectoriales a partir del ingreso de las expresiones algebraicas de sus componentes.

En este trabajo, se centrará la atención en las actividades en las que se solicita proponer una fórmula analítica para los campos vectoriales que se muestran en la Figura 1. Esta tarea implica la conversión del registro gráfico al analítico.

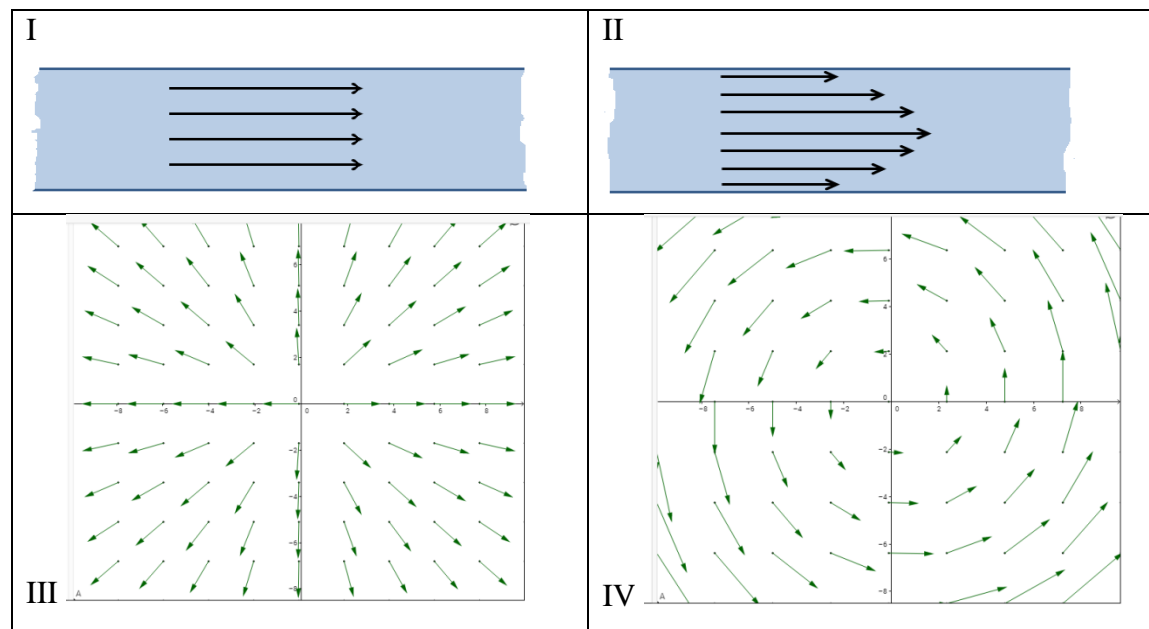
Se registraron por escrito las conversaciones más relevantes que los alumnos mantuvieron a fin de obtener indicios sobre las estrategias puestas en juego para su abordaje, las dificultades

---

<sup>16</sup> [www.geogebra.org/m/GwRc5mQP](http://www.geogebra.org/m/GwRc5mQP)

encontradas, lo que ellos entendían a partir de las devoluciones que obtenían en pantalla, y cómo utilizaban esa información para re-pensar la tarea en caso de no obtener lo que esperaban.

También se solicitó a los alumnos que entreguen por escrito las respuestas a las consignas, intentando reflejar todo el procedimiento, lo más explícitamente posible, incluyendo los intentos fallidos.



**Figura 1.** Campos vectoriales dados en la consigna para representar analíticamente

## Resultados

En relación al gráfico I, en general no tuvieron dificultades para interpretar que el hecho de que las “flechas” tengan longitud constante, representa que el fluido se mueve a igual velocidad en cualquier lugar del tubo, mientras que en relación al gráfico II se considera el roce con la superficie del tubo, dando lugar a un movimiento más lento cerca de la misma (representado con flechas más cortas) y más rápido en el centro (flechas más largas). Es decir, que en este caso, el pasaje del registro gráfico al lenguaje coloquial, no parece haber impuesto mayores dificultades. En los casos III y IV, se observa que existen dificultades para expresar formalmente lo observado en las figuras, sin embargo se observan algunas ideas generales que parecen dar cuenta de que comprenden la representación. Por ejemplo:

A1: *“En el III, los módulos de los vectores no varían, sin embargo cada vector tiene una dirección que parece apuntar hacia afuera del centro. En el IV, los módulos de los vectores varían y sus direcciones son similares a los vectores de velocidad de una circunferencia”.*

Este alumno parece estar visualizando las líneas de campo del campo dado.

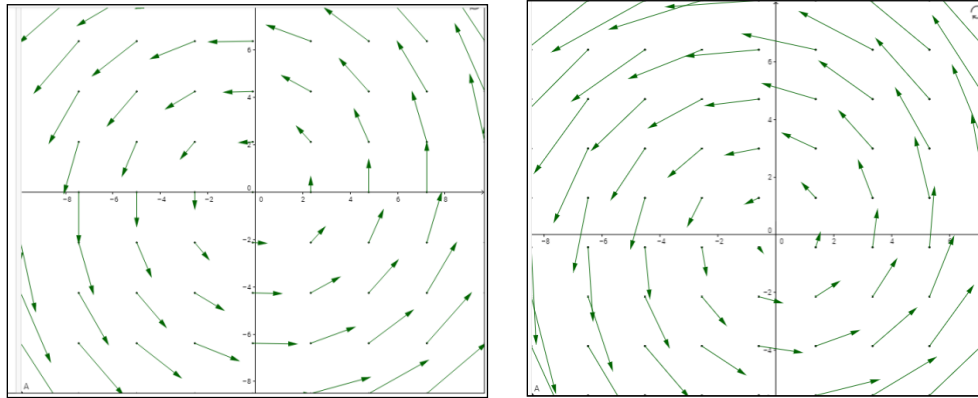
A2: “En el III, el módulo de los vectores es el mismo, y sus direcciones son opuestas. Se está representando una expansión. En el IV, los módulos de los vectores aumentan a medida que nos alejamos del centro, esto indica un aumento de lo que el vector está representando. Las direcciones adoptan una forma de espiral en el plano”.

Si bien el lenguaje utilizado por este alumno no es correcto, logra encontrar ejemplos o analogías con fenómenos que pueden representarse con esos campos.

Otra de las actividades que se planteó, consistió en proponer una fórmula analítica para los siguientes campos representados gráficamente (conversión del registro gráfico al analítico). En la clase habitual de la materia, los alumnos resuelven actividades en las cuales deben pasar del registro analítico al gráfico, pero nunca al revés. Es esos casos, los alumnos utilizan para la resolución la técnica de *punteo*, es decir, seleccionan algunos puntos del dominio, evalúan la fórmula en esos puntos y grafican las flechas correspondientes en los puntos seleccionados. Al invertir el registro de salida y el de llegada (es decir, al solicitar que pasen del registro gráfico al analítico) se observan múltiples dificultades entre las cuales se pueden observar:

- Algunas asociadas al **concepto de vector**: los alumnos no parecen dominar el lenguaje específico. Por ejemplo, al hablar de “*posición positiva o negativa*”, “*sentido positivo o negativo*”. Otro ejemplo se relaciona con el concepto de *vector unitario*, que los alumnos aprenden en una asignatura anterior, pero parecen no dominar: “¿Así que unitario quiere decir que tiene módulo uno?”.
- Otras asociadas a la dificultad de comprender al **campo vectorial como una función**. Por ejemplo, la confusión entre las coordenadas cartesianas de un punto del dominio con las componentes del vector que es su imagen. Esto se observa en las dificultades de los alumnos para proponer campos en los cuales la primera componente dependa de la variable  $y$  y que la segunda componente dependa de la variable  $x$ . Cabe notar que cuando ellos resuelven actividades usuales de pasar del registro analítico al gráfico, como se mencionó anteriormente, abordan múltiples ejemplos donde esto ocurre.
- Una **particularidad de la representación gráfica de los campos vectoriales** es que solamente se eligen algunos puntos y se representan las flechas asociadas a los mismos. No es posible en una región acotada del plano representar la totalidad de las flechas. La dificultad asociada a este hecho se observa, por ejemplo, cuando frente a dos representaciones gráficas distintas de un mismo campo vectorial, considerando distintos

conjuntos de puntos, los alumnos no logran reconocer que puede tratarse de un mismo campo (ver ejemplo en Figura 2).



**Figura 2.** La figura de la izquierda, es la presentada a los estudiantes en la consigna. Al representar en el *applet* el campo  $\langle -y, x \rangle$ , un grupo de alumnos tenía la vista centrada en un punto distinto del origen de coordenadas, obteniendo un gráfico similar al de la figura de la derecha. Los alumnos no pudieron identificar que ambas gráficas representaban el mismo campo.

En relación a los procedimientos puestos en juego por los alumnos, se puede mencionar lo siguiente: En el primer caso (campo constante), los alumnos no tuvieron grandes dificultades para proponer una representación analítica. En el segundo caso, algunos alumnos observaron que las puntas de las flechas se encontraban dispuestas sobre una parábola, lo que les sugería la existencia de alguna relación de tipo cuadrática. Sin embargo, se observó una dificultad por parte de ellos para aceptar que la primera componente del campo dependiera de la variable  $y$ , como se señaló anteriormente. De manera similar en el caso IV, se observa que uno de los alumnos, al visualizar que las líneas de campo son circunferencias, propone la siguiente expresión analítica:  $\langle \cos(x), \sin(y) \rangle$ , de manera que asocia la definición del campo con la parametrización de la circunferencia. Además, en la primera componente expresa una dependencia con  $x$  y en la segunda con  $y$ .

Luego se observó que el gráfico obtenido mediante el graficador, sirvió para que los alumnos reconozcan que la respuesta no era correcta, pero no para ayudarlos a pensar el porqué del error y realizar una propuesta más adecuada, sino que los siguientes intentos parecieron más azarosos. Por ejemplo, en el caso III un grupo de alumnos propone  $\langle x, y \rangle$  y observan en el graficador que resulta un campo radial, es decir que la dirección es correcta, sin embargo observan que no es de módulo constante, y proponen entonces  $\langle x^2, y^2 \rangle$ , sin reflexionar sobre cómo lograr que los módulos sean constantes.

## Conclusiones y trabajos a futuro

La mayor dificultad para los alumnos fue pasar del registro gráfico al analítico. Otra de las dificultades halladas fue comprender que las componentes del campo puedan depender tanto de la variable  $x$  como de la variable  $y$ . La idea inicial que tenían los alumnos era que la primera componente del campo dependía solo de  $x$  y la segunda solo de  $y$ , y no les resultó sencillo superar esta concepción. Esta dificultad, que no estaba prevista al comienzo del trabajo de investigación, se vincula más que con la conversión entre registros, con las reglas de formación dentro del registro analítico.

Con respecto al graficador, resultó beneficioso, pero trajo otros inconvenientes que no se habían tenido en cuenta antes. Si bien permitió a los alumnos validar las distintas expresiones analíticas, no ayudó a buscar la correcta. Además, si la gráfica que obtenían no era idéntica a la que se les daba, no reconocían que podía tratarse del mismo campo. Si bien la visualización contribuye, no implica necesariamente aprender mejor. Es necesario diseñar cuidadosamente las actividades para que el *software* resulte de ayuda para realizar la conversión entre registros.

Cabe destacar que las primeras actividades con el graficador resultaron más trabajosas pero esto les permitió adquirir mayor fluidez en las últimas actividades.

Como trabajos a futuro interesa profundizar en la identificación y caracterización de las dificultades, saber qué tan extendidas están y poder cuantificarlas. Además, proponer actividades para llevar al aula que permitan la conversión entre los distintos registros en particular del registro gráfico al analítico, para mejorar la comprensión de los campos vectoriales y estudiar en qué condiciones un *software* graficador puede contribuir con su aprendizaje y en la articulación de registros de representación.

## Referencias bibliográficas

- Alvarez, T. (2010). La visualización de conceptos matemáticos y el aprendizaje del electromagnetismo. *Latin-American Journal of Physics Education*, 4(1), 21.
- Costa, V; Di Domenicantonio, R. (2010) Efecto de la implementación de estrategias didácticas en la enseñanza del concepto “campo vectorial y sus aplicaciones”. *XXIV Congreso Chileno de Enseñanza en Ingeniería*.
- Costa, Viviana (2013). Aspectos destacados de las teorías cognitivas del aprendizaje, como estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de conceptos del cálculo vectorial. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 513-521). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.



Duval, R. (1998) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173 – 201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

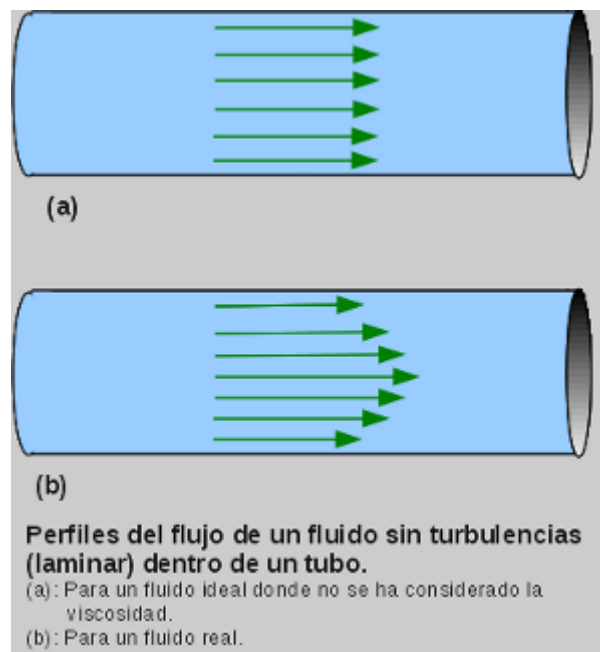
Duval, R. (1999) *Semiosis y pensamiento humano*. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali, Peter Lang, Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.

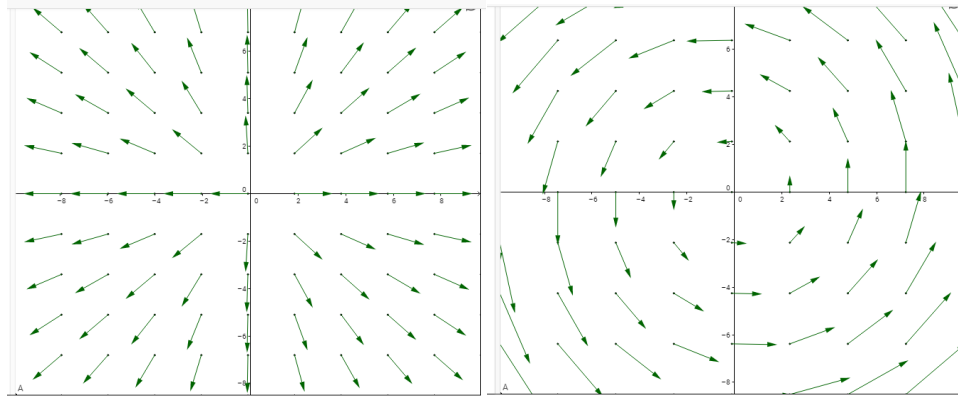
## ANEXO

En todos los casos van a trabajar con GeoGebra. Dejen por escrito todos los intentos que realizaron para resolver los ejercicios.

- 1) ¿Qué entienden por campo vectorial? Expliquen con sus palabras y ejemplifiquen.
- 2) En el siguiente gráfico se muestra un campo de velocidades de un fluido (estacionario). Indiquen el significado de las diferentes longitudes de las flechas.



- 3) A partir de la visualización de los siguientes campos vectoriales, describan como son los módulos y las direcciones de cada uno.



- 4) Propongan para los gráficos de los ejercicios 2 y 3 una fórmula para poder representarlos.
- 5) El concepto de campo fue desarrollado por Michael Faraday en el contexto de fuerzas eléctricas. Un campo eléctrico existe en una región del espacio alrededor de un cuerpo cargado. Para el caso de una carga aislada positiva, se dice que genera un campo radial que emana de dicha carga. Por otro lado a medida que nos alejamos de la carga el campo “pierde intensidad con el cuadrado de la distancia”.

Realicen un gráfico de dicho campo, marque las líneas de campo y proponga una fórmula para el mismo.

- 6) Propongan una fórmula para el campo de la figura.

